Algèbre linéaire

Introduction

- **Formulation d'algorithmes pour la résolution de nombreux problèmes conduisent à des systèmes d'équations linéaires qui doivent être résolus**

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

  - Méthodes directes
    - → Méthodes d'élimination de Gauss
  - Méthodes itératives
    - → Formulation comme un problème de minimisation
    - → Algorithmes de minimisation

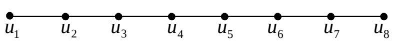
$$\min J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} - \mathbf{x}^T\mathbf{b}$$

- **Résolution de problèmes aux valeurs propres**

$$\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$$

Exemples

- **Calcul de la dérivée d'une fonction u(x)**



$$f(\mathbf{x}) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}}$$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\Delta x} \begin{pmatrix} -2 & +2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & +2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{Au}$$

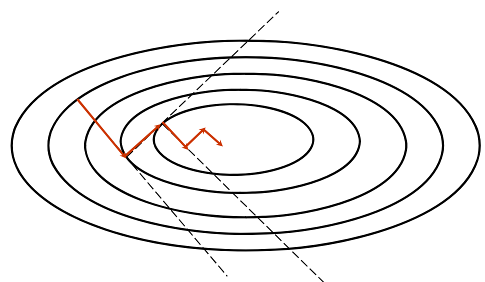
Méthodes itératives: formulation variationnelle

- **Résolution de systèmes d'équations linéaires de grande taille**
  - Méthode du gradient

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\min J(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} - \mathbf{x}^T\mathbf{b}$$

$$\nabla J(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$$



Prof.: Pierre Gauthier

Problèmes aux valeurs propres

- **Recherche des valeurs et vecteurs propres d'une matrice**

$$\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v} \Rightarrow \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

- **Exemple: résolution d'équations différentielles**

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{\lambda t}$$

$$\mathbf{Av} - \lambda \mathbf{v} = 0$$

Algèbre linéaire: résolution de systèmes d'équations linéaires

- **Méthode d'élimination de Gauss**

$$\mathbf{Ax = b}$$

où $\mathbf{A} = \mathbf{A}(N \times N)$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(N \times 1)$ et $\mathbf{b} = \mathbf{b}(N \times 1)$.

- **Opérations élémentaires**

$\mathbf{K}_{ij}$: interchanger les lignes i et j.

$\mathbf{H}_{ij}(\alpha)$: multiplier la ligne "j" par α et ajouter le résultat à la ligne "i"

$\mathbf{S}_{i}(\alpha)$: diviser par α tous les éléments de la ligne "i"

- **Matrice associée aux opérations élémentaires (exemples pour matrice** 3×3)

$$\mathbf{K}_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_{23}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{2}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Application d'une suite d'opérations élémentaires**

$$\mathbf{P} = \mathbf{L}_k \mathbf{L}_{k-1} \dots \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1$$

de part et d'autre de l'équation Ax =b de telle sorte que

$$\mathbf{PAx = Ux = Pb}$$

où U est une matrice triangulaire supérieure, i.e.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Système est résolu par substitution arrière:

$$x_n = \frac{(\mathbf{Pb})_n}{u_{nn}} \qquad x_{k-1} = \frac{1}{u_{k-1,k-1}} \left((\mathbf{Pb})_{k-1} - \sum_{i=k}^{N} u_{k-1,i} x_i \right)$$

Exemple

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ -20 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Matrice augmentée:

$$\mathbf{M} \equiv (\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

Opérations effectuées:
$\mathbf{M}^{(2)} = \mathbf{H}_{41}(-1)\mathbf{H}_{21}(-2)\,\mathbf{M}$

$$\mathbf{M}^{(2)} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right]$$

Elément pivot de M_{22} étant nul, on applique la permutation $\mathbf{K}_{23}$:

$$\mathbf{M}^{(3)} = \mathbf{K}_{23}\mathbf{M}^{(2)} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right]$$

- Finalement, $\mathbf{M}^{(4)} = \mathbf{H}_{43}(2)\,\mathbf{M}^{(3)} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$

Solution: $x_4 = 2$, $x_3 = -(-4+x_4) = 2$, $x_2 = 3$ et $x_1 = -7$

Méthode des pivots partiels et précision numérique

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.00300 & 59.14 \\ 5.291 & -6.130 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 59.17 \\ 46.78 \end{pmatrix}$$

Solution exacte: $x_1 = 10$ et $x_2 = 1$.

Elimination de Gauss: $\mathbf{H}_{21}(-5.291/.00300) = \mathbf{H}_{21}(1{,}764)$

$$\mathbf{H}_{21}(-1{,}764)\,(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} .00300 & 59.14 & 59.17 \\ 0 & -104{,}300 & -104{,}400 \end{array}\right)$$

Solution: $x_1 = 10.00$ et $x_2 = 1.001$.

Algorithme d'élimination de Gauss avec pivots partiels pour résoudre un système de n équations linéaires

Opérations à effectuer sur la matrice augmentée $\mathbf{M} = (\mathbf{A}|\mathbf{b})$

I- Poser i = 1.

II- Trouver p tel que $i \le p \le n$, et $|a_{p,i}| = \max_{i \le p \le n} |a_{j,i}|$

Si $|a_{p,i}| = 0$, le système n'a pas de solution unique (dét $\mathbf{A} = 0$) $\Rightarrow$ STOP

sinon effectuer la permutation $\mathbf{K}_{pi}$.

III- Pour j = i+1, … , n, effectuer l'opération $\mathbf{H}_{ji}(a_{ji}/a_{ii})$.

IV- Ajouter 1 à i ($i \to i + 1$)

V- Si i < n, retourner à l'étape II.

Si i = n, aller à l'étape 6.

VI- Si $a_{nn} = 0$, le système n'a pas de solution unique (dét $\mathbf{A} = 0$) $\Rightarrow$ STOP

Si $a_{nn} \neq 0$, on résout par substitution arrière.

$$x_n = \frac{m_{n,n+1}}{m_{nn}} \qquad x_{k-1} = \frac{1}{M_{k-1,k-1}}\left(M_{k-1,N+1} - \sum_{i=k}^{N} M_{k-1,i}\,x_i\right)$$

Précision de la solution numérique

- **Soit x_t la solution exacte et x^* ,la solution numérique**
  - **Erreur numérique:** $\varepsilon = \mathbf{x}_t - \mathbf{x}^*$
  - **Résidu de l'équation:** $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*$
  - **Si l'erreur est nulle, alors le résidu le sera également.**
- **Exemple avec un calcul à 3 décimales**

$$\begin{pmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{pmatrix}$$

Solution: $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} -0.443 \\ 1.00 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} 1.000 \\ -1.000 \end{pmatrix}$ $\quad$ Résidu: $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -0.000460 \\ -0.000541 \end{pmatrix}$

Remarques

- **Matrice est presque singulière**
  - Méthode d'élimination de Gauss avec pivots partiels garantit que les résidus seront petits à la précision numérique du calcul
  - Résolution en utilisant une double précision (6 chiffres significatifs) conduit à la bonne solution

Conditionnement d'une matrice et précision numérique

- **Soit x^* la solution numérique et x_t la solution exacte. Critère de mesure de l'exactitude de la solution**
  - Norme de l'erreur: $E = \| \mathbf{x}^* - \mathbf{x}_t \|$

    ou
  - Norme du résidu: $r = \| \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^* \|$

  Il existe des cas où r << 1 mais E ne l'est pas.

  - **Exemple**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.001 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{pmatrix}$$

  - Solution: $\mathbf{x}^* = (3,0)^T$ mais $\mathbf{x}_t = (1,1)^T \Rightarrow r = 0.002$ mais $E = 3$.
    - * Dans ce cas, on note que dét (A) = –.001 et le système est presque singulier

Norme d'un espace linéaire normé

- **Définition et propriétés de la norme $\|\mathbf{x}\|$ d'un vecteur x:**
  - * $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ et $\|\mathbf{x}\| = 0$ si et seulement si $\mathbf{x} = \mathbf{0} = (0, \ldots, 0)^T$
  - * $\|\alpha\, \mathbf{x}\| = |\alpha|\, \|\mathbf{x}\|$ pour tout scalaire α
  - * $\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1\| \leq \|\mathbf{x}_1\| + \|\mathbf{x}_2\|$
- **Différentes normes satisfont ces propriétés:**
  - * Norme dite L^p:

$$\| \mathbf{x} \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p \right)^{1/p}$$

  Pour p =2, on a la norme euclidienne

  - * Norme quadratique: $\| \mathbf{x} \|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$

  où **Q** est une matrice symétrique définie positive.

Rapport de conditionnement d'une matrice

$$M = \max_{\mathbf{x}} \frac{\| \mathbf{A}\mathbf{x} \|}{\| \mathbf{x} \|}, \qquad m = \min_{\mathbf{x}} \frac{\| \mathbf{A}\mathbf{x} \|}{\| \mathbf{x} \|}$$

- Définition: cond(**A**) = M/m.
- **Propriétés:**
  - – cond(**A**) $\geq$ 1
  - – cond(**P**) = 1, où P est une matrice de permutation
  - – cond(α**A**) = αcond(**A**)
- **Example:** si D est une matrice diagonale, alors

$$\text{cond}\,(\mathbf{D}) = \frac{\max | d_{ii} |}{\min | d_{ii} |}$$

  où les d_{ii} sont les éléments de la diagonale de **D.**

Conditionnement et relation entre norme de l'erreur et norme du résidu

Considérons: **Ax = b** **(1)**

Si Δx est l'erreur commise sur la solution exacte x_t, alors

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}^* - \mathbf{b}_t - \Delta\mathbf{b} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_t + \Delta\mathbf{x}) - \mathbf{b}_t - \Delta\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Donc

A Δx = Δb **(2)**

(1) implique que $\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq M\, \|\mathbf{x}\|$

(2) implique que $\|\Delta\mathbf{b}\| = \|\mathbf{A}\Delta\mathbf{x}\| \geq m\, \|\Delta\mathbf{x}\|$

Conséquemment:

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq cond(\mathbf{A}) \cdot \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

$\therefore$ **Conditionnement est le facteur d'agrandissement de l'erreur relative.**

Remarque

- **De façon générale, on définit le conditionnement de A comme étant**

$$cond(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|$$

- **Norme utilisée est souvent || . ||$_1$ et on peut montrer que**

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \le j \le N} \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}|$$

- **Exemple**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 1 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \end{pmatrix} \qquad \|\mathbf{A}\|_1 = \max(5,12,10) = 12$$

Conclusion

- **Précision numérique ne permet pas d'aller à la limite où $\varepsilon \to 0$.**
- **Algorithmes peuvent être instables au sens où une petite erreur initiale croît géométriquement pour conduire à un résultat erroné.**